4Л

УДК 519.6:37.015.6

***О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, О.В. Ярмош***
Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків
Україна, 61003, м. Харків, вул. Університетська, 16

# Про економетричний аналіз залежності контингенту студентів від рейтингу та ціни освітніх послуг ВНЗ

***O.M. Lytvyn, L.S. Lobanova, O.V. Iarmosh***
*Ukrainian Engineering Pedagogics Academy, c. Kharkiv*
*Ukraine, 61003, c. Kharkiv, Universitetska st., 16*

# *Econometric Analysis of Dependence of Students' Contingent on Rating and Price of Educational Services of University*

***О.Н. Литвин, Л.С. Лобанова, Е.В. Ярмош***
Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков
Украина, 61003, г. Харьков, ул. Университетская 16

# Об эконометрическом анализе зависимости контингента студентов от рейтинга и цены образовательных услуг вуза

У статті запропонований метод побудови математичної моделі залежності кількості набраних студентів за певною спеціальністю від ціни навчання та рейтингу вищого навчального закладу. При моделюванні використані кусково-лінійні сплайни. Для визначення степеня впливу зазначених в моделі факторів знайдено залежність частинних коефіцієнтів еластичності від досліджуваних факторів за допомогою глобальних інтерполяційних формул.
**Ключові слова:** контингент студентів, ціна навчання, рейтинг ВНЗ, кусково-лінійні сплайни, глобальні інтерполяційні формули, частинні коефіцієнти еластичності.

The method for constructing mathematical model for dependence of number of students on the price of certain specialty of university and its ranking is proposed in the paper. When modeling piecewise linear splines are used. To determine the influence of these factors in the model, the dependence of the partial elasticities of studying factors using global interpolation formulas is found.
**Key words:** students' contingent, the price of education, university ranking, piecewise linear splines, global interpolation formula, partial elasticities.

В статье предложен метод построения математической модели зависимости количества набранных студентов по определенной специальности от цены обучения и рейтинга высшего учебного заведения. При моделировании использованы кусочно-линейные сплайны. Для определения степени влияния указанных в модели факторов найдена зависимость частных коэффициентов эластичности от исследуемых факторов с помощью глобальных интерполяционных формул.
**Ключевые слова:** контингент студентов, цена обучения, рейтинг ВУЗа, кусочно-линейные сплайны, глобальные интерполяционные формулы, частные коэффициенты эластичности.

## Вступ

Перехід суб'єктів господарювання до діяльності в ринкових умовах захопив усі галузі та сфери діяльності держави. Не виключенням є й сфера освіти. Сьогодні вини-

кає необхідність розробки нових математичних методів управління економічною діяльністю закладів освіти.

Тому розглянуто моделювання процесу формування контингенту студентів навчального закладу на основі інформації про рейтинг ВНЗ (з урахуванням напряму підготовки), ціну навчання (для конкретної спеціальності) та кількості зарахованих на перший курс студентів на контрактну та бюджетну форми навчання. Однак отримана в результаті моделювання залежність має не лише допомагати проводити прогнозування відносної кількості студентів контрактної (бюджетної) форми навчання до загальної кількості зарахованих при заданих рівнях ціни на освітню послугу та рейтингу ВНЗ, визначати орієнтовний рівень ціни, якщо відомі рейтинг ВНЗ, а також описувати рівень чутливості до зміни кожного фактора. Тому в роботі також досліджено коефіцієнти еластичності контингенту за рейтингом та ціною.

**Метою роботи** є побудова математичних моделей, що описують залежність попиту на освітні послуги вищого навчального закладу від його рейтингу та ціни освітньої послуги, та проведення економетричного аналізу впливу досліджуваних у математичній моделі факторів.

# Постановка задачі

Нехай нам задано таблицю значень $(RR_i, PP_i, FF_i)$, $i=\overline{1,M}$, де $RR_i$ - рейтинг ВНЗ за напрямом підготовки (у прикладі, який розглядаємо, місце ВНЗ у рейтингу від 1 до 10), $PP_i$ - ціна навчання за конкретною спеціальністю ВНЗ у досліджуваному навчальному році (грн.), $FF_i$ - контингент студентів $i$-го ВНЗ (осіб), ($FF_i = FF_i^б + FF_i^к$, де $FF_i^б$ - кількість зарахованих студентів на бюджетну форму навчання, $FF_i^к$ - кількість зарахованих студентів, які навчаються за кошти фізичних осіб (контрактна форма навчання)), $M$ - кількість ВНЗ, які досліджуються.

Запровадимо такі позначення:

1) $R_i = \dfrac{1}{RR_i}$, $i=\overline{1,M}$, тобто більше значення $R_i$ відображає вищий рейтинг ВНЗ, $R_i \in (0,1]$ ($R_i = 1$ при $RR_i = 1$), далі під рейтингом будемо розуміти обернений рейтинг;

2) $P_i = \dfrac{PP_i}{PP_{\max}}$, $PP_{\max} = \max\limits_{1\le i\le M} PP_i$, $i=\overline{1,M}$;

3) $F_i^к = \dfrac{FF_i^к}{FF_i^б + FF_i^к}$, або $F_i^б = \dfrac{FF_i^б}{FF_i^б + FF_i^к}$, відповідно, для кожного ВНЗ $F_i^к + F_i^б = 1$, $i=\overline{1,M}$.

Для побудови зазначеної математичної моделі також можна використати й інші підходи переходу до безрозмірних величин.

Як спостережувані дані в роботі використана інформація, отримана з офіційних і публічних джерел [1], [2], звітні дані ВНЗ. Дослідження проведено для освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» за спеціальністю «Менеджмент» у 2010 – 2011 навчальному році.

# Побудова математичної моделі залежності контингенту студентів від рейтингу та ціни освітньої послуги ВНЗ

Для побудови математичної моделі отримано за спостережуваними даними сітку вузлів, що є нерегулярною. Оскільки координати вузлів не мають між собою аналітичних залежностей, то відповідну сіткову область $G$ тріангульовано, тобто поділено на скінченну кількість трикутних підобластей $T_l, 1 \le l \le Q_1$.

Для кожного отриманого трикутника $T_\mu$, де мультиіндекс $\mu$ містить компоненти, що є номерами вузлів трикутника, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \{1,2,...,Q\}$, запишемо оператор інтерполяції $O_\mu(r,p)$

$$O_\mu(r,p) = F_{\mu_1}\frac{\varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p)}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}} + F_{\mu_2}\frac{\varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p)}{\Delta_{\mu_2,\mu_1,\mu_3}} + F_{\mu_3}\frac{\varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)}{\Delta_{\mu_3,\mu_1,\mu_2}}, \quad (1)$$

де $\varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p) = \begin{vmatrix} r & p & 1 \\ R_{\mu_2} & P_{\mu_2} & 1 \\ R_{\mu_3} & P_{\mu_3} & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3} = \begin{vmatrix} R_{\mu_1} & P_{\mu_1} & 1 \\ R_{\mu_2} & P_{\mu_2} & 1 \\ R_{\mu_3} & P_{\mu_3} & 1 \end{vmatrix} = \varphi_{\mu_2,\mu_3}(R_{\mu_1}, P_{\mu_1})$ - визначники третього порядку, $F_{\mu_k} = F(R_{\mu_k}, P_{\mu_k}),\ k = \overline{1,3}$.

$$O(r,p) = O_\mu(r,p),\ (r,p) \in T_\mu \subset G.$$

Оскільки за межами трикутника $T_\mu$ функція $O_\mu(r,p)$ не визначена, то для автоматичного визначення $O(r,p)$ побудуємо функції $\Psi_\mu(r,p)$, побудовані за формулами:

$$\Psi_\mu(r,p) = RK\left(RK\left(\omega_{\mu_1,\mu_2}(r,p), \omega_{\mu_2,\mu_3}(r,p)\right), \omega_{\mu_3,\mu_1}(r,p)\right), \quad (2)$$

де $\omega_{\mu_1,\mu_2}(r,p) = \dfrac{\varphi_{\mu_1,\mu_2}(r,p)}{\varphi_{\mu_1,\mu_2}(r_{\mu_3}, p_{\mu_3})}$, $RK(u,v) = \left(u + v - \sqrt{u^2+v^2}\right) \times 0.5$ - $R$-кон'юнкція [3].

Тоді для будь-якої точки $(r,p)$ отримаємо

$$O(r,p) = O_\mu(r,p), \text{ якщо } \Psi_\mu(r,p) \ge 0.$$

Детальніший опис побудови такої математичної моделі подано у [3].

# Визначення частинних коефіцієнтів еластичності для дослідження побудованої математичної моделі

На практиці виникає необхідність визначення ступеня впливу кожного з досліджуваних факторів на процес формування контингенту студентів, що дозволить зробити висновок про значущість впливу на нього рейтингу чи ціни. Зауважимо, що відображенням такої залежності є коефіцієнт еластичності функції.

Запишемо формули для визначення еластичності за рейтингом та ціною через частинні похідні за кожною змінною.

$$E_r(r,p) = \frac{r \cdot \dfrac{dO_\mu(r,p)}{dr}}{O_\mu(r,p)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}}\left(F_{\mu_1}\dfrac{\partial\varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p)}{\partial r} + F_{\mu_2}\dfrac{\partial\varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p)}{\partial r} + F_{\mu_3}\dfrac{\partial\varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)}{\partial r}\right)}{\dfrac{1}{\Delta_{\mu_1,\mu_2,\mu_3}}\left(F_{\mu_1}\varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p) - F_{\mu_2}\varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p) + F_{\mu_3}\varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)\right)} = \quad (3)$$

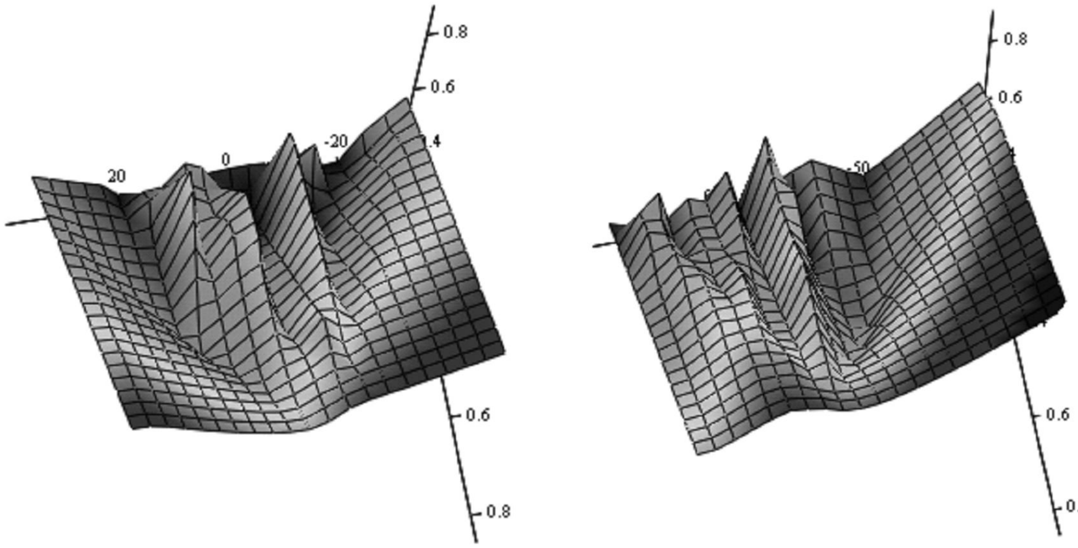
$$= \frac{F_{\mu_1}\dfrac{\partial\varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p)}{\partial r} + F_{\mu_2}\dfrac{\partial\varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p)}{\partial r} + F_{\mu_3}\dfrac{\partial\varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)}{\partial r}}{F_{\mu_1}\varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p) - F_{\mu_2}\varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p) + F_{\mu_3}\varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)}$$

Аналогічно отримуємо

$$E_p(r,p) = \frac{p \cdot \dfrac{dO_\mu(r,p)}{dp}}{O_\mu(r,p)} = \frac{F_{\mu_1} \dfrac{\partial \varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p)}{\partial p} + F_{\mu_2} \dfrac{\partial \varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p)}{\partial p} + F_{\mu_3} \dfrac{\partial \varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)}{\partial p}}{F_{\mu_1} \varphi_{\mu_2,\mu_3}(r,p) - F_{\mu_2} \varphi_{\mu_1,\mu_3}(r,p) + F_{\mu_3} \varphi_{\mu_1,\mu_2}(p,r)}. \quad (4)$$

З урахуванням того, що за межами трикутника $T_\mu$ функція $O_\mu(r,p)$ не визначена, то знаходимо значення коефіцієнтів еластичності для кожного трикутника з використанням середніх значень рейтингу ($Rs_\mu$) та ціни ($Ps_\mu$) в ньому.

Отримані результати наведено на рис. 1.




а) б)

Рисунок 1 - Залежність значення коефіцієнта еластичності за рейтингом (а) та за ціною (б) від середніх значень рейтингу ВНЗ та ціни освітньої послуги для кожного трикутника $T_\mu$

Нагадаємо [5], що при аналізі отриманих результатів вважається, що попит (у нашому випадку виражається в кількості студентів, які були зараховані на навчання) називається еластичним, якщо абсолютна величина еластичності більше одиниці, нееластичним – якщо абсолютна величина еластичності знаходиться в межах від нуля до одиниці, тобто $E_f \in (0,1)$, цілком нееластичним – якщо $E_f = 0$, цілком еластичним – якщо абсолютна величина еластичності – велике число.

Значення еластичності, зображені на рис. 1, свідчать про необхідність їх подальшого згладжування з метою виділення інтервалів рейтингу та ціни, при яких відповідне значення еластичності є умовно сталою величиною. Для побудови таких функцій можна використовувати інтерполяційні оператори Шепарда для наближення функцій однієї та двох змінних та глобальну інтерполяційну формулу Литвина [6], які автори використовували у попередніх роботах.

Алгоритм побудови таких формул включає:

1) побудову оператора наближення даних, розміщених на нерегулярній сітці вузлів, що має вигляд:

$$L(r,p) = \begin{cases} E_1, Q_1 = 1 \\ \sum\limits_{k=1}^{Q_1} E_k \prod\limits_{j=1, j \neq k}^{Q_1} \dfrac{(r - Rs_j)(Rs_k - Rs_j) + (p - Ps_j)(Ps_k - Ps_j)}{(Rs_k - Rs_j)^2 + (Ps_k - Ps_j)^2}, Q_1 \geq 2 \end{cases}. \quad (5)$$

де $Rs, Ps$ - середні в трикутнику значення рейтингу та ціни відповідно; $E_k$ - значення еластичності за рейтингом чи ціною окремо.

2) використання раціональних допоміжних базисних функцій з метою використання обмежених допоміжних функцій:

$$S(r,p,\lambda)=\frac{\sum_{k=1}^{Q_1}E_k\prod_{j=1,j\neq k}^{Q_1}\left|\frac{(r-Rs_j)(Rs_k-Rs_j)+(p-Ps_j)(Ps_k-Ps_j)}{(Rs_k-Rs_j)^2+(Ps_k-Ps_j)^2}\right|^{\lambda}}{\sum_{k=1}^{Q_1}\prod_{j=1,j\neq k}^{Q_1}\left|\frac{(r-Rs_j)(Rs_k-Rs_j)+(p-Ps_j)(Ps_k-Ps_j)}{(Rs_k-Rs_j)^2+(Ps_k-Ps_j)^2}\right|^{\lambda}},\qquad(6)$$

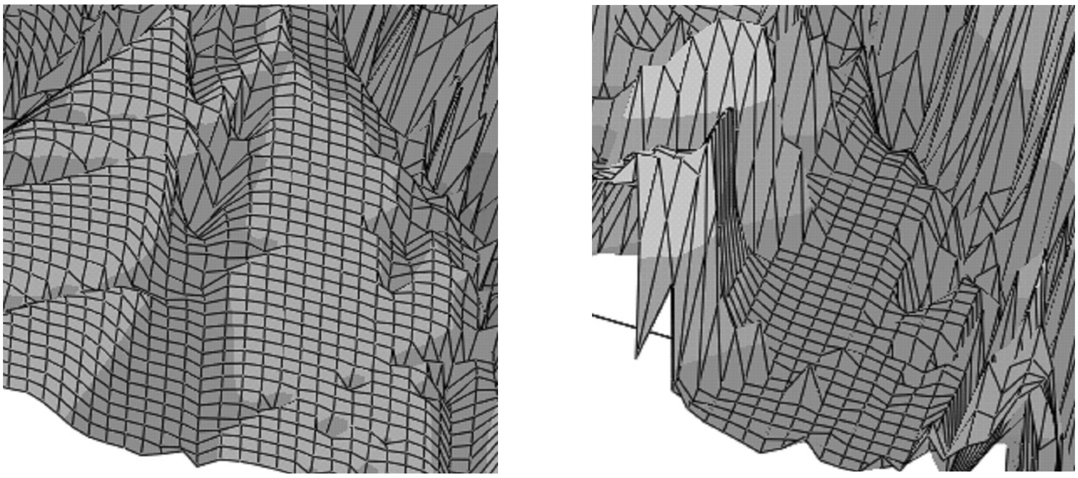
де параметр $\lambda\in(0,\infty)$ істотно впливає на поведінку поверхні в околі точок $(Rs_k,Ps_k)$. Наприклад, якщо $\lambda\geq 2$, то поверхня $Z=S(r,p,\lambda)$ буде мати в околі вказаних точок частинні похідні, що дорівнюють нулю $\frac{\partial S(r,p,\lambda)}{\partial r}=\frac{\partial S(r,p,\lambda)}{\partial p}=0$, $\forall(r,p)=(Rs_k,Ps_k),\ k=\overline{1,Q_1}$.

З використанням функцій (7) проведено дослідження отриманих у результаті наближення частинних коефіцієнтів за рейтингом і за ціною. Проведене дослідження дозволяє виділити зони, де значення зазначених коефіцієнтів є сталими величинами, що наведено на рис. 2.

# Висновки та перспективи подальших досліджень

Аналіз значень коефіцієнтів в досліджуваних трикутниках показав, що досить часто (у 40,0% випадків) попит за рейтингом є нееластичним, за ціною – еластичним (81,8% випадків); в цілому рівень впливу на попит на освітні послуги ВНЗ ціни більш значущий, ніж рейтингу (у 67,3% випадків).

Побудовані в роботі залежності для частинних коефіцієнтів еластичності дозволяють виділити проміжки, на яких ці коефіцієнти є сталою величиною: для коефіцієнта еластичності – за рейтингом при $r\in(0{,}25;0{,}65)$ та $p\in(0{,}35;1{,}0)$, для коефіцієнта еластичності – за ціною при $r\in(0{,}35;1{,}0)$ та $p\in(0{,}45;0{,}55)$.



а) б)

Рисунок 2 – Графічне зображення результатів наближення значень коефіцієнта еластичності за рейтингом при $r\in(0,1]$ (а) та за ціною при $p\in(0,1]$ (б)

Варто зазначити, що на цих проміжках попит на освітні послуги, виражений у відносній частці зарахованих студентів на контрактну форму навчання до їх загальної кількості, є відносно нееластичним. Отримані результати, на думку авторів, пов'язані з тим, що у випадку ВНЗ з рейтингом $r \in [0{,}1;0{,}2]$, де входить основна кількість ВНЗ, відсутні загальні рекомендації щодо встановлення ціни навчання та розподілу місць державного замовлення.

У випадку, коли відбувається одночасна зміна як рейтингу ВНЗ, так і ціни освітньої послуги, необхідно визначати сумарний коефіцієнт еластичності попиту. Для його визначення скористаємося властивостями коефіцієнта еластичності.

У [5] сформульовано та доведено таку властивість коефіцієнта еластичності: для функції $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$ еластичність $z$ по $t$ в точці $x_0$ знаходиться за формулою:

$$E_{zt} = E_{zx}E_{xt} + E_{zy}E_{yt},$$

де $E_{zx}, E_{zy}$ - еластичність $z$ по $x$ та $y$ в точці $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, а $E_{xt}, E_{yt}$ - еластичності $x$ та $y$ в точці $t_0$.

При дослідженні сумарного коефіцієнта еластичності функції багатьох змінних через частинні коефіцієнти можна скористатися тотожністю Ейлера, перевівши її на мову еластичності. Якщо у формулі

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) x_k = \lambda f(x) \tag{7}$$

функція $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ однорідна степені $\lambda$ по змінних $x_1, ..., x_n$ і не обертається в нуль, то, розділивши обидві частини тотожності (7) на $f(x)$, отримаємо $\sum_{k=1}^{n} E_f^{x_k}(x) = \lambda$.

# Література


1. Рейтинг вузов Украины «Компас-2010». Менеджмент и экономика [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.yourcompass.org/ ratings/compas_2010/branch/management.php.
2. Інформаційна система «Конкурс». Вступна компанія 2010 [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://vstup.info/2010/.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / Рвачев В.Л. – К. : Наук. думка, 1982. – 550 с.
4. Литвин О.М. Математичне моделювання контингенту студентів ВНЗ за допомогою кусково-лінійних сплайнів / О.М. Литвин, Л.С. Лобанова, О.В. Ярмош // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика : Наук. журнал / Донецький нац. ун-т. – 2011. - № 1-2. – С. 151-157.
5. Математика в экономике : учебник : в 2 т. / [А.С. Солодовников, В.А. Бабайчев, А.В. Браилов и др.]. – М. : Финансы и статистика, 2000. – 376 с.
6. Литвин О.М. Математичне моделювання розподілу корисних копалин методами інтерлінації та інтерфлетації функцій / Литвин О.М., Штепа Н.І., Литвин О.О. – К. : Наукова думка, 2011. – 228 с.


# Literatura


1. Rejting vuzov Ukrainy "Kompas-2010". Menedzhment i jekonomika. http://www.yourcompass.org/ ratings/compas_2010/branch/management.php.
2. Informacijna systema "Konkurs". Vstupna kompaniya 2010. http://vstup.info/2010/.
3. Rvachev V.L. Teorija R-funkcij i nekotorye ee prilozhenija. K.: Nauk. Dumka. 1982. 550s.
4. Lytvyn O.M. Prykladna statystyka. Aktuarna ta finansova matematyka: Nauk. Zhurnal. Doneckyj nac. un-t. 2011. №1-2. S. 151-157.

5. Solodovnikov A.V. Matematika v jekonomike. Uchebnik v 2 h ch. Ch.2. M.: Finansy i statistika. 2000. 376 s.
6. Lytvyn O.M. Matematychne modelyuvannya rozpodilu korysnyx kopalyn metodamy interlinaciyi ta interfletacikyi funkcij. K.: Naukovo-vyrobnyche pidpryyemstvo "Vydavnyctvo "Naukova dumka" NAN Ukrayiny". 2011. 228 s.

**_RESUME_**

***O.M. Lytvyn, L.S. Lobanova, O.V. Iarmosh***

*Econometric Analysis of Dependence of Students' Contingent on Rating and Price of Educational Services of University*

The method for constructing a mathematical model for dependence of the recruited number for some spatiality students, expressed in share of students' learning contract on to the total recruited number for this spatiality students, on the price of education services and ranking of higher educational institution with help of piecewise linear splines are proposed in the paper.

Computer experiment of the proposed method performed according to the 2010 – 2011 school year, the specialty "Management of Organizations."

The result of mathematical model allows to predict the recruited number of students if the rating and the price of education services for the specialty are known, as well as to determine the degree of influence of these factors. For this purpose, values of the partial elasticities were calculated and analyzed in the work.

To smooth the obtained values of the elasticities, statements that describe their dependence on the investigated factors (the rating and price) with the global interpolation formulas are constructed. These operators are allowed to select the area in which the coefficient of elasticity for the rating or price respectively is constant. For selected areas of demand is relatively inelastic.

The next step is to study the overall coefficient of elasticity, which are relevant in the theoretical conclusions.

*Стаття надійшла до редакції 05.06.2012.*